Chapitre 5 Séries entières

Dans ce cours nous étudions une classe particulière de séries de fonctions, à savoir les séries entières qui possèdent des propriétés spéciales (convergence uniforme, régularité de la fonction somme, ...).
Le domaine d'application des séries entières est très vaste. Citons quelques exemples d'applications :
- Calcul numérique d'intégrales.
- Calcul approché des valeurs numériques de certaines fonctions (exponentielle, logarithme, ...
- Résolution de certaines équations différentielle

1 - Définition - Rayon de convergence

1.1. Définitions.

Définition 1.1. On appelle série entière réelle une série de fonction de la forme $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ où $\forall n\geq 0$ $a_n \in \mathbb{R}$ et où x est une variable réelle ⌋

Exemples

1°/ Série géométrique : $1+x+\dots+x^n+\dots$. Cette série est convergente pour $|x|<1$ et sa somme dans ce cas est $\frac{1}{1-x}$. Elle est divergente pour $|x|\geq 1$.

2°/ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est une série entière où $a_n = \frac{1}{n!}$.
Mais $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$ est aussi une série entière où $a_n = \frac{1}{n!}$, pour n pair et $a_n = 0$ pour n impaire.

L'exemple 1 fait apparaître un intervalle où la série est convergente. Le problème qui se pose est de déterminer l'ensemble des valeurs x pour lesquelles une série entière est convergente et d'étudier alors les propriétés de la fonction somme.

1.2. Rayon de convergence

Définition 1.2. Soit $\sum a_n x^n$ st une série entière réelle. On appelle rayon de convergence de cette série entière, le nombre réel positif R vérifiant :

- Pour $|x| < R$, $\sum a_n x^n$ converge absolument
- Pour $|x| > R$, $\sum a_n x^n$ diverge.

L'ensemble $I_R = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < R\}$ st appelé intervalle ouvert de convergence.

Remarque Le rayon de convergence, R, peut être :

- 0 alors $\sum a_n x^n$ ne converge absolument qu'en $x = 0$.
- $R > 0$ $\sum a_n x^n$ cv. abs. sur I_R
- $R = +\infty$ $\sum a_n x^n$ cv. abs sur $\mathbb{R}$.

1.3. Détermination du rayon de convergence

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$. On suppose $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $a_n \neq 0$ $\forall n \geq n_0$

On va appliquer le critère de d'Alembert ou de Cauchy à la série $\sum |a_n x^n|$. Posons $f_n(x) = a_n x^n$. On a

$$\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| \quad \text{définie pour tout } n \geq n_0$$

Supposons que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ admet une limite finie ou infinie

1°/ $\lim_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0. \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \sum a_n x^n$ cv. abs. pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction $S(x) = \sum a_n x^n$ est définie dans $\mathbb{R}$ tout entier.

2°/ $\lim_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = +\infty \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = +\infty$ $\forall x \neq 0$.

Donc $\sum a_n x^n$ ne converge pas absolument

soit $x \in \mathbb{R}$. $\lim_{n \to +\infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = +\infty \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_1$ $|f_{n+1}(x)| \geq |f_n(x)|$ $|f_n(x)|$ suite croissante. ne tend pas vers 0. $\sum f_n(x)$ n'est pas convergente

$\Rightarrow |f_n(x)|$ n'est pas convergente pour $x \neq 0$

3- $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\ell$. ($\ell\neq 0$, fini). $\forall x\in\mathbb{R}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|}=\ell.|x|$.

a) si $|x|<\dfrac{1}{\ell}$ alors $\sum a_n x^n$ converge absolument.

b) si $|x|>\dfrac{1}{\ell}$ alors $\sum|a_n x^n|$ diverge et $\sum a_n x^n$ diverge aussi

Car à partir d'un certain rang n_1 $|f_{n+1}(x)|\geq|f_n(x)|$ et $f_n(x)$ ne tend pas vers 0 à l'infini.

c) Si $|x|=\dfrac{1}{\ell}$. La règle de d'Alembert ne permet pas de conclure.

<u>Remarque</u> La règle de Cauchy permet parfois de conclure si la règle de d'Alembert ne le permet pas.

<u>Théorème 1</u> Si $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell$ (fini ou infini) alors $R=\dfrac{1}{\ell}$

De même si $\sqrt[n]{|a_n|}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell$ (fini ou infini) alors $R=\dfrac{1}{\ell}$.

<u>Exemples</u>

1°) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n!}$. $a_n=\dfrac{1}{n!}$. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ $\Rightarrow R=+\infty$

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ est abs. convergente $\forall x\in\mathbb{R}$. $I_R=\mathbb{R}$.

2°) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin n}{n}x^n$. i) si $0<r<1\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin n}{n}r^n=0$.

alors $R\geq 1$

ii) si $r>1$ $\dfrac{\sin n}{n}r^n$ n'admet pas de limite. $n\to+\infty$

$\Rightarrow\sum\dfrac{\sin n}{n}r^n$ est divergente $\Rightarrow R\leq 1$.

D'où $\boxed{R=1}$

1.4. <u>Cas où certains a_n sont nuls.</u>

$\sum\dfrac{x^{2n+1}}{2^n(n+1)}$. Ici $a_{2n}=0$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Donc on ne peut faire comme précédemment

Pour contourner cette difficulté, on pose $f_n(x)=\dfrac{x^{2n+1}}{2^n(n+1)}$

$\dfrac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|}=\dfrac{(n+1)|x|^2}{2(n+1)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{|x|^2}{2}$. Donc si $\dfrac{|x|^2}{2}<1$ la série converge absolument si $\dfrac{|x|^2}{2}>1$, la série diverge

$\Rightarrow]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$

1.5. <u>Lemme d'Abel</u> : Si $\sum a_n x^n$ converge pour $x = x_0 \neq 0$ alors elle est absolument convergente pour tout x t.q. $|x| < |x_0|$ et, en plus, on a $R \geqslant |x_0|$ (R : rayon de convergence de la série)

<u>Preuve</u> : $\sum a_n x_0^n$ cv $\Rightarrow a_n x_0^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geqslant n_0$ on a $|a_n x_0^n| \leq 1$. Soit x t.q. $|x| < |x_0|$

$|a_n x^n| = \underbrace{|a_n x_0^n|}_{\leq 1} \Big|\underbrace{\frac{x}{x_0}}_{<1}\Big|^n \leq \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ terme général d'une série géométrique convergente.

2_ <u>Opérations sur les séries entières</u>

2.1. Multiplication par un scalaire.

Soit λ scalaire $\neq 0$. Les séries $\sum a_n x^n$ et $\sum \lambda a_n x^n$ ont même intervalle de convergence et sur cet intervalle

$$\sum_{n \geqslant 0} \lambda a_n x^n = \lambda \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n.$$

2.2. <u>Somme de deux séries entières</u>

$\sum_n a_n x^n$ a pour rayon de convergence R_1

$\sum b_n x^n$ " " R_2.

On appelle somme de ces deux séries la série entière

$\sum_n (a_n + b_n) x^n$

<u>Théorème 2</u> Le rayon de convergence de $\sum_n (a_n+b_n)x^n$ est égal à $R = \min(R_1, R_2)$ si $R_1 \neq R_2$ et vérifie $R \geqslant R_1$ si $R_1 = R_2$

<u>Dém.</u> Soit $|x| < \min(R_1, R_2)$ $|(a_n+b_n)x^n| \leq |a_n x^n| + |b_n x^n|$

$\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont abs. cv $\Rightarrow \sum (a_n+b_n)x^n$ est abs. cv.

$\Rightarrow R \geqslant \inf(R_1, R_2)$.

Si $R_1 \neq R_2$ (par exemple $R_1 < R_2$). Pour $R_1 < |x| < R_2$.

$\sum a_n x^n$ diverge et $\sum b_n x^n$ converge $\Rightarrow \sum (a_n+b_n)x^n$ diverge

$\Rightarrow R \leq R_1 = \min(R_1, R_2)$.

<u>Exemple</u> 1°/ Le rayon de cv. de $\sum x^n$ est $R_1 = 1$

Le rayon de cv de $\sum \frac{1}{2^n} x^n$ est $R_2 = 2$.

En utilisant la règle d'Hadamard, on montre que le rayon de convergence de la somme est 1. Ce qui confirme le théorème 2.

2°/ Le rayon de cv de $\sum x^n$ est $R_1 = 1$
" " $\sum \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) x^n$ est $R_2 = 1$
Mais le rayon de cv de la somme est $\sum \frac{1}{2^n} x^n$ est $R =$

2.3 Produit de 2 séries entières

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_1 et R_2 et de sommes respectives $f(x)$ et $g(x)$.
Pour $|x| \leq \min(R_1, R_2)$ $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont abs. cvtes on

$$f(x) g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} h_n(x) \quad \text{avec } h_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k b_{n-k} x^{n-k}$$

Alors $f(x) g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ et le rayon de convergence R du produit vérifie $R \geq \min(R_1, R_2)$

Exemple $\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n$

3. Fonction définie par une série entière

$\sum a_n x^n$ une série entière. R son rayon de convergence. $R \neq 0$.
I_R son intervalle de convergence. On définit la fonction f sur I_R par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \forall x \in I_R$

3.1. Continuité

Théorème 3 Toute série entière est uniformément convergente sur tout intervalle fermé centré en 0 et inclus dans I_R. Puisque $a_n x^n = f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ alors f est continue sur I_R.

Dém Soit $[-\rho, \rho] \subset I_R$. $\sum a_n x^n$ sera normalement convergente sur $[-\rho, \rho]$ donc uniformément.
Les (f_n) sont continues.
Alors f est continue sur I_R.

Remarques

1°/ $\sum a_n x^n$ n'est pas forcément convergente si $|x| = R$

2°/ On n'a pas en général la convergence uniforme de $\sum a_n x^n$ sur $I_R =]-R, R[$.

Exemples

1°/ $\sum x^n$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$.

en effet $R = 1$. $\forall x \in]-1,1[$, $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

On pose $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$, on a $\forall x \in]-1,1[$

$$|f(x) - f_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x}$$

et $\sup_{]-1,1[} |f(x) - f_n(x)| = +\infty$. Pas de conv. uniforme sur $]-1,1[$.

2°/ $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ a pour rayon de convergence 1.

$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ diverge pour $x = 1$ et converge pour $x = -1$.

Soit $f(x)$ la somme de la série entière. On a.

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{(-x)^n}{n}.$$

D'après le théorème des séries alternées on a.

$$\forall x \in [-1, 0] \quad \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^n \frac{(-x)^n}{n} \right| \leq \frac{(-x)^{n+1}}{n+1}$$

$$\sup_{[-1,0]} \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^n \frac{(-x)^n}{n} \right| \leq \sup_{[-1,0]} \frac{(-x)^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ cv. unif^t sur $[-1,0]$. Donc f est continue sur $[-1,0]$ et pas seulement sur $]-1,0]$.

Dans ce qui suit, $\sum a_n x^n$ est une série entière réelle de rayon de convergence $R > 0$ et soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \forall x \in]-R, R[.$$

Th 1 $\sum a_n x^n$ série entière de rayon de convergence $R > 0$ si $\sum a_n R^n$ (resp $\sum a_n (-R)^n$) converge alors la série est uniformément convergente sur $[0, R]$ (resp $[-R, 0]$)

3.2. Intégration

Th.5 $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ et $\sum a_n x^n$ ont le même rayon de conver

et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x f(t)\,dt$.

Remarque

Exemple $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \; \forall x \in]-1,1[$. D'après le Th.5, on a

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} \Rightarrow -\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \; \forall x \in]-1$$

$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ est convergente, Th.4 $\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est continue sur $[-1,0]$

$$\Rightarrow -\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \; \forall x \in [-1,1[\Rightarrow x = 2.$$

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

3.3. Dérivation

Th.6 $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^{n-1}$ ont le même rayon de convergence

En plus f est de classe C^1 sur $]-R,R[$ et on a

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \; \forall x \in]-R,R[.$$

Th.7 Soit $f(x) = \sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

alors f est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et on a

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n x^{n-p} \; \forall x \in]-R,R[$$

et pour $x=0$, on obtient $a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$.

Exemple On a $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \; \forall x \in]-1,1[$

Th.6 $\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \; \forall x \in]-1,1[$

Th.7 $\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^p} = \frac{1}{p!} \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) x^{n-p} \; \forall x \in]-1,1[$

4- Développement d'une fonction en série entière

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$ et soit S sa somme définie par $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ $\forall x \in]-R,R[$.
Nous avons vu que S est de classe C^∞ sur $]-R,R[$.

Réciproque ? soit f une fonction définie sur un ensemble contenant 0, on se propose de chercher s'il existe une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon R, dont la somme $S(x)$ coïncide avec f sur $]-R,R[$

Il faut que f soit de classe C^∞

4.1. Définition

soit f une fonction de classe C^∞ sur un voisinage I de 0.

On dit que f est développable en série entière en 0 si et seulement si il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R>0$ et un voisinage J de 0 t.q

$$\forall x \in J, \quad f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Exemple $f: x \longmapsto \frac{1}{1-x}$ est développable en série en 0 car pour tout x t.q $|x|<1$, on a $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

4.2. Développements obtenus par la formule de Mac Laurin

f de classe C^∞ au voisinage I de 0. on applique la formule de Mac-Laurin :

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x) \quad 0<\theta<1$$

Soit $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$

La question est alors : Est-ce que

$$|f(x)-S_n(x)|=\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Si c'est oui, on aura $f(x)=\lim_{n\to+\infty} S_n(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

<u>Définition</u>. On appelle série de Mac Laurin associée à f la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

<u>Th8</u> Soit f de classe C^∞ sur un voisinage I de 0 s'il existe une constante positive K t.q. $\forall x \in I \ \forall n \in \mathbb{N} \quad |f^{(n)}(x)| \leq K$ alors f est développable en série entière et on a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

<u>Preuve</u> $|f(x) - S_n(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \right| \leq K \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.

La série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est convergente (règle de d'Alembert)

$\Rightarrow \left| \frac{x^n}{n!} \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \Rightarrow |f(x) - S_n(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$|f^{(n)}(x)| \leq K$




ETUSUP.com